INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE DE L'INFORMATION

concours d'élève titulaire de l'ENSAI
concours externe d'attaché de l'INSEE

MAI 1999

Option A. – **MATHÉMATIQUES**

deuxième composition de mathématiques

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet comprend 5 pages (y compris celle-ci)

Tournez la page S.V.P.

L'objet du problème est l'étude de l'intégrale dépendant de deux paramètres réels α et β, définie par :

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt.$$

Dans la première partie, on exprime $I(\alpha, \beta)$ sous forme sommatoire et l'on obtient un équivalent pour β fixé.

Dans la deuxième partie, on calcule l'intégrale dans certains cas particuliers, et l'on étudie la suite $I(-n, n)$.

Dans la troisième partie, on étudie la régularité de la fonction I.

On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

et la relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

On désigne par ζ la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

PARTIE I

1. Démontrer que la fonction $t \to (-\ln t)^{\alpha}(1-t)^{\beta}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $\alpha + \beta > -1$.
   On notera $\Omega = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \alpha + \beta > -1\}$ l'ensemble de définition de la fonction I.

2. *a.* Montrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \Omega$, on a :
$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}(1-e^{-x})^{\beta}\, dx.$$
   b. Exprimer $I(\alpha, 0)$ à l'aide de la fonction Γ, puis donner la valeur de $I(n, 0)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
   c. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, n) \in \Omega$ on a :
$$I(\alpha, n) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{(k+1)^{\alpha+1}}.$$
   d. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, et α tendant vers $+\infty$, on a $I(\alpha, n) \sim \Gamma(\alpha+1)$ et calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha, n)$.

3. On suppose dans cette question que β n'est pas un entier naturel.
   a. Justifier pour tout $x > 0$, l'égalité :
$$(1-e^{-x})^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n(\beta) e^{-nx}$$
   où $(u_n(\beta))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite que l'on explicitera.
   b. Montrer que la série de terme général :
$$v_n = \ln \frac{(n+1)^{\beta+1} |u_{n+1}(\beta)|}{n^{\beta+1} |u_n(\beta)|}$$
   est convergente.
   En déduire l'existence d'une constante $K \neq 0$ telle que $u_n(\beta) \sim \frac{K}{n^{\beta+1}}$ pour n tendant vers $+\infty$.
   c. En déduire que pour tout $(\alpha, \beta) \in \Omega$, on a la formule :
$$I(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n(\beta)}{(n+1)^{\alpha+1}}.$$

4. Exprimer $I(\alpha, -1)$ et $I(\alpha, -2)$ à l'aide des fonctions Γ et ζ.

5. *a.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > n$, exprimer $I(\alpha, -n-1)$ en fonction de $I(\alpha, -n)$ et $I(\alpha-1, -n)$.
   b. En déduire une expression sommatoire donnant $I(\alpha, -n)$ en fonction des $I(\alpha-1, -p)$, où $p \in [\![1, n-1]\!]$.
   c. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I(\alpha, -n) \sim \Gamma(\alpha+1)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

6. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, prouver que pour α tendant vers $+\infty$ on a :
$$I(\alpha, \beta) \sim \Gamma(\alpha+1).$$

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II

1. *a.* Calculer $I(0, \beta)$ pour $\beta > -1$.

   b. Montrer que pour $\beta > -2$ on a :

$$I(1, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1+\beta)}.$$

   c. Par comparaison avec une intégrale, démontrer que lorsque β tend vers $+\infty$ on a :

$$I(1, \beta) \sim \frac{\ln \beta}{\beta}.$$

2. *a.* Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $[\ln(1-u)]^2$.

   b. En déduire que pour $\beta > -3$ on a :

$$I(2, \beta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2+\beta)}.$$

3. *a.* Prouver que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

   b. En déduire la valeur de $I\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

4. On étudie dans cette question la suite $(I(-n, n))_{n \in \mathbb{N}}$.

   a. Soit g une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $g(1) \neq 0$. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt \sim \frac{g(1)}{n}.$$

   b. On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$, prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 1$. Vérifier que f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $[0, +\infty[$ sur $]0, 1]$.

   c. En déduire un équivalent simple de $I(-n, n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. (On pourra effectuer un changement de variable).

PARTIE III

1. Montrer que I est continue sur Ω. On pourra écrire :

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{1/e} (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt + \int_{1/e}^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, dt.$$

2. *a.* Prouver que sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ la fonction $-\frac{\ln t}{1-t}$ est encadrée par deux réels strictement positifs.

b. En déduire que si $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{\substack{(\alpha,\beta) \to (\alpha_0, -1-\alpha_0) \\ (\alpha,\beta) \in \Omega}} I(\alpha, \beta) = +\infty.$$

Jusqu'à la fin du problème, on fixe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$.

On définit la fonction I_2 sur $]-\alpha-1, +\infty[$ par $I_2(\beta) = I(\alpha, \beta)$.

3. *a.* Étudier la monotonie de I_2.

b. Montrer que $\lim_{\beta \to +\infty} I_2(\beta) = +\infty$.

4. On suppose dans cette question que $\alpha < 0$. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $I(\alpha, n)$ est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$. (On pourra utiliser la question III.2.*a*.)

5. *a.* Soit $\lambda \in]0, 1[$. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 (1-u^{1/\lambda})^n \, du \leq \frac{\lambda \Gamma(\lambda)}{n^\lambda}.$$

(On pourra comparer sur $\mathbb{R}^+$ les fonctions e^{-x} et $1-x$).

b. On suppose maintenant $\alpha > 0$. Soit $\theta \in]0, 1[$; démontrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I(\alpha, n) \leq \frac{C}{n^{1-\theta}}.$$

(On pourra utiliser le fait que $t^\theta (-\ln t)^\alpha$ est borné sur $]0, 1[$).